tambor en determina la forma. El capítol es tanca amb l'estudi asimptòtic de les mitjanes dels nombres de Betti de l'espai de configuracions per a mecanismes aleatoris quan el nombre de baules tendeix a infinit; tema que és interessant en biologia molecular.

El segon capítol es dedica a la característica d'Euler-Poincaré de l'espai de configuracions de n partícules que es mouen sense col·lisió dins un políedre X. L'objecte fonamental aquí és la sèrie de potències d'Euler-Gal que ve a ser la funció generadora de les característiques de cada espai de configuracions respecte del número de partícules. És remarcable que, per a qualsevol políedre finit, la sèrie esmentada correspongui a una funció racional de la qual en podem calcular numerador i denominador a partir de la topologia del complex inicial. S'estudia especialment el cas en què X és un graf.

La teoria de nusos del braç de robot és el tema següent. Aquí reprenem els mecanismes del capítol primer, però ara amb un extrem lliure, i ens demanem si hi ha alguna posició al pla que no es pugui desplegar completament tenint en compte que les baules del mecanisme no es poden creuar (problema del fuster). Descobrim que, al pla, l'espai de configuracions no és tan sols arc-connex sinó que el quocient d'aquest pel grup d'isometries positives del pla és contràctil. No passa el mateix en dimensions superiors i és fàcil de trobar contraexemples a l'espai. El següent problema tracta de la rigidesa de combinacions planes formades per baules rígides completades amb barres que poden allargar-se.

El darrer capítol es dedica a l'estudi topològic de la planificació del moviment, és a dir, de les maneres de passar d'una configuració a una altra dins de l'espai de configuracions X d'un sistema mecànic. El problema es formalitza com la cerca de seccions del fibrat de camins de X sobre $X \times X$. La complexitat topològica de X s'associa al número mínim de parts de la base del fibrat on una secció és contínua. Es dóna una fita superior de la complexitat en termes de la dimensió de X i de la seva connectivitat.

En resum, és un llibre interessant per al lector amb base matemàtica, però temo que, malgrat el títol, no convida gaire a qui, procedent de la robòtica, vol veure quines matemàtiques hi tenen relació. Probablement la part més interessant per a mi és la secció final, en la qual es recomanen lectures posteriors i s'esmenten les referències més aplicades.

El llibre és en general clar, a excepció de les figures que són escasses i algunes encara no prou ben pensades (particularment confosa és una figura en la qual se'ns mostra en traç gruixut una circumferència en presència de corones circulars).

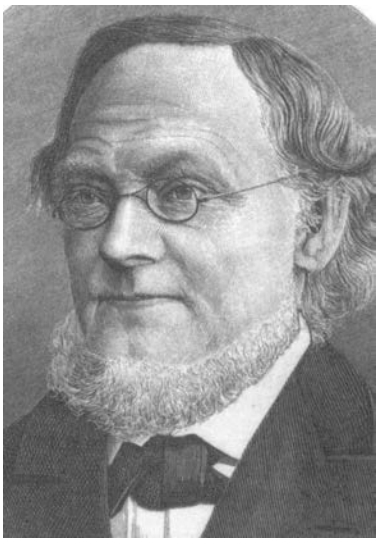
Jordi Saludes
UPC

Racó biogràfic

Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Hermann Günther Grassmann (1809-1877), de qui el proper 15 d'abril celebrarem el segon centenari del naixement (coincidint amb el 302 d'Euler), fou un veritable científic multidisciplinari, amb aportacions especialment rellevants en matemàtiques, física i lingüística. Tercer dels onze fills de Justus Günther Grassmann, professor de matemàtiques i física del Gymnasium (Institut) d'Stettin, i de Johanne Luise Friederike Medenwald, fou inicialment educat per ella, aprengué a tocar el piano i anà a una escola privada fins que va poder entrar al Gymnasium. D'estudiant més aviat fluixet (el seu pare pensava que podria ser jardiner o artesà), va anar progressant fins acabar, als 18 anys, segon de la seva promoció. Això li permeté, dins el sistema prussià d'ensenyament, anar a estudiar a la Universitat de Berlín com Robert, el seu germà gran. Del 1827 al 1830, hi estudià teologia, llengües clàssiques, filosofia i literatura. De retorn a Stettin, es prepará durant un any per a l'habilitació com a professor en teologia i en matemàtiques i física, que aprengué, sens dubte orientat i influenciat pel seu pare, de manera autodidacta. Obtinguda l'habilitació el desembre del 1831, el 1832 passà a ser professor assistent d'una escola

elemental dependent del Gymnasium, alhora que inicià les seves recerques geomètriques. El 1834 Grassmann substitueix en la Gewerbeschule de Berlín (escola de comerç) el geòmetra Jakob Steiner, nomenat professor a la Universitat de Berlín. Prefereix, però, tornar a Stettin i exercir de professor de matemàtiques, física, llatí, alemany i religió a la recent oberta Otto Schule, mentre continua els seus estudis de teologia, matemàtiques i física.



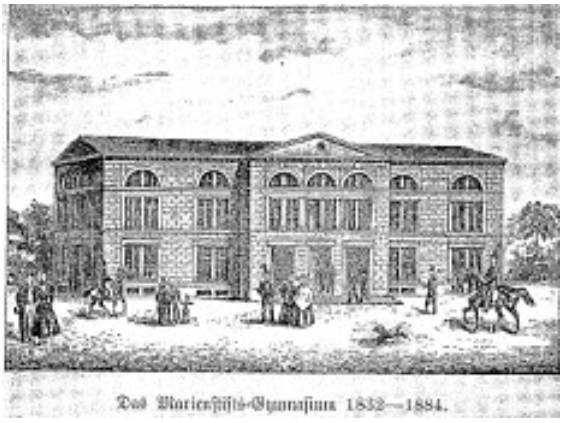
Hermann Günther Grassmann.

El maig del 1840 obté a Berlín l'habilitació com a professor del Gymnasium per a tots els nivells de matemàtiques, física, mineralogia i química. Entre d'altres mèrits requerits, es valorà la seva memòria sobre la teoria de les marees ≪Theorie der Ebbe und Flut≫, un treball de dues-centes pàgines publicat pel seu pare, en el qual desenvolupà el tema de manera *geometricovectorial* més enllà de la mecànica analítica de Lagrange i la mecànica celeste de Laplace. La satisfacció personal que li suposà aquest treball fou decisiva en la seva renúncia a ordenar-se i exercir com a pastor luterà un cop passades totes les proves el 1839. Sempre a Stettin, i després de diversos canvis de centre, serà des de maig del 1847 *Oberlehrer* a la Friedrich Wilhemschule i des del 1952 professor del Gymnasium d'Stettin, plaça que quedà vacant a la mort del seu pare i que comportava un salari major que el de la majoria dels professors universitaris. Amb tot, Grassmann no assolí la seva tan desitjada fita de ser professor universitari. De les dues peticions directes que adreçà al *Kulturministerium*, la de maig del 1847 va ser refusada el mes següent a causa de l'informe desfavorable d'E. E. Kummer, professor a la Universitat de Breslau. Tot i reconèixer l'originalitat i el valor científic del contingut dels treballs de Grassmann, els considerà deficients quant a la forma i a l'organització. La segona petició, formulada el 1862, fou desestimada allegant que implicaria un decrement salarial. I el 1868 la proposta feta per Grünther per a una segona càtedra de matemàtiques a Greifswald va ser refusada pels seus col·legues de facultat.

Contrasta aquesta dificultat per aconseguir el reconeixement del seu treball matemàtic, al qual dedicà els majors esforços de la seva vida, amb el reconeixement obtingut en altres camps. Foren els seus treballs en física, en els camps de l'electrodinàmica, la teoria dels colors, l'acústica i l'òptica elementals els que li procuraren l'admissió el 1864 a l'Acadèmia Leopoldina, la més antiga d'Alemanya fundada el 1652. I el 1876, un any abans de la seva mort i gràcies als seus treballs en sànscrit, una llengua que començà a estudiar el 1849, fou nomenat membre de l'American Oriental Society i doctor *honoris causa* (*Ehrendoktor*) per la Universitat de Tübingen. El seu diccionari i la seva traducció del Rig Veda reberen una acollida immediata i continuen avui dia plenament vigents, com ho és la seva obra matemàtica. De la intensitat de la seva vida social donen compte la seva pertinença a la lògia maçònica d'Stettin, de la qual arribà a ser tresorer, i la cofundació amb el seu germà Robert, arran dels successos de 1848–1849, de dues revistes de caràcter conservador —defensant la monarquia constitucional i la unificació alemanya amb hegemonia prussiana—, interessant-se per les qüestions de dret constitucional. Finalment, en l'ordre estrictament familiar, tingué onze fills amb Marie Therese Knappe, filla d'un terratinent amb qui es casà el 12 d'abril de 1849. D'aquests, nou sobrevisqueren i set arribaren a l'edat adulta. Hermann Ernst va ser professor a la Universitat de Giessen i col·laborà amb Engel i Study en la publicació de l'obra matemàtica de Grassmann; Justus i Max foren professors del Gymnasium d'Stettin.

Serveixi la biografia precedent per aproparnos (apropiar-nos) amb esperit tranquil a (de) l'obra d'un personatge la vida del qual difícilment podríem qualificar de tràgica. Podem doncs, davant de la seva obra, abstenir-nos d'adoptar qualsevol mena d'actitud redemptora o

sectària que sovint acompanya la reivindicació d'un màrtir «per la causa» ni que en aquest cas sigui per la ciència. La veritable tragèdia, si insistim a donar aquesta qualificació a la desatenció que patí la seva obra matemàtica per part de l'*establishment* acadèmic, ha estat soferta per la mateixa matemàtica (pura i aplicada), com força encertadament assenyalà Dyson el 1972 en *Missed Opportunities*, la seva memorable «Gibbs Lecture» davant l'American Mathematical Society. És la meva modesta opinió, compartida amb un no menyspreable nombre de físics, enginyers i també matemàtics, que encara avui està pendent la plena assumpció del llegat de Grassmann a la ciència matemàtica, amb importants implicacions ja en l'ensenyament preuniversitari, aquell al qual Grassmann estigué vinculat i al qual dedicà —no sempre a cor content— grans esforços al llarg de la seva vida.



El Gymnasium d'Stettin, on Grassmann fou professor els darrers 25 anys de la seva vida.

No tractaré aquí —ni hi ha espai ni tinc competència per fer-ho— de resumir les aportacions de Grassmann. De fet, seguint el consell de Clifford Truesdell, és en l'estudi dels clàssics i no en els seus intèrprets (*tradutore-traditore*) on amb més probabilitat podem trobar els coneixements que ens han de permetre superar els reptes presents. Grassmann inicià la redacció de la seva gran obra mestra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* la primavera del 1842 i l'acabà a la tardor del 1843, publicant-se el 1844. El primer de juliol de 1846 guanyà el premi ofert per la Fürstliche Jablonowski'schen Gesellschaft amb *Die Geometrische Analyse geknüpft und die von Leibniz Characteristik*. El silenci, bandejament o mera desconsideració per part de matemàtics tan rellevants com Cauchy, Gauss, Kumer, i el mateix Moebius, d'unes aportacions que no estaven redactades d'acord amb els cànons acadèmics el portà a redactar de nou, ara *more acadèmico*, els resultats de les seves recerques, amagant o eliminant del tot la «filosofia, metafísica o concepció global del sistema». *Die Ausdehnungslehre: Vollständing und in strenger Form* es publicà a Berlín el 1862, però tampoc obtingué el ressò desitjat. De fet, el 1878, es republicà, amb dos apèndixs, el primer *Ausdehnungslehre*, que Grassmann continuà considerant com a expressió més acurada i convenient de les seves idees sobre la nova branca de les matemàtiques per ell creada: la de les magnituds extensives. El 1877, any de la seva mort, publicà l'article *Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre*, on pretenia haver aconseguit explicar els quaternions de Hamilton en el seu sistema. No tingué, doncs, temps per a rebre ni la més profunda i sincera admiració pel conjunt de la seva obra, ni tampoc reconèixer la incorrecta identificació de les magnituds extensives corresponents als quaternions, ambdues contingudes en l'article inequívocament titulat *Applications of Grassmann's Extensive Algebra* que publicà William Kingdon Clifford el 1878, en el primer volum dels *Annals of Mathematics*. És en base a aquest article, considerat fundacional pel que fa a les àlgebres de Clifford, que aquest matemàtic anglès pot, justament, ser considerat el primer gran grassmanià que, practicant la nova ciència, conquereix i revalora el territori «rival» dels quaternions i amplia el seu domini d'acció a tota geometria mètrica, en dimensió i signatura arbitràries. I en particular al pla i a l'espai ordinaris de la geometria elemental i/o escolar. Dit altrament, Grassmann, Hamilton i Clifford foren tres poliglots excel·lents que forjaren un llenguatge multivectorial o extensiu al qual de cap manera podem renunciar per causa dels errors històrics comesos, ni que sigui amb la millor voluntat, pels seus seguidors o pels que no arribaren a comprendre'ls. El bicentenari del naixement de Grassmann, com ho ha estat també el recent bicentenari de Hamilton, ofereix una nova oportunitat per a conèixer i apropiar-nos del passat per a dissenyar i construir un millor futur.

Bibliografia

Grassmann, H. *The Ausdehnungslere of 1844, and Other Works, Open Court*. Chicago, 1995. Traducció Lloyd C. Kannenberg.

Grassmann, H. *Extension Theory (Die Audehnungslehre von 1862)*. AMS 2000. Traducció Lloyd C. Kannenberg.

Schubring, G. (ed). *Hermann Günther Grassmann (1809–1877): Visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*. Papers from a Sesquicentennial Conference. Kluwer 1996.

Parra; J. M. «William Kingdon Clifford, als 150 anys del seu naixement». *Notícies SCM*. 01, maig 1995, 10–12.

Parra; J. M. «L'àlgebra vectorial. Una història que ens cal reescriure». *But. SCM*, 10 (1995), 75–120.

Josep Manel Parra
UB

Webs de matemàtiques

Project Euler

Els problemes són l'ànima de les matemàtiques. Tant si són els més abstrusos problemes oberts que només entenen cinc persones al món, com els humils problemes d'un llibre de text d'ensenyament primari, un problema de matemàtiques és sempre un repte per a aquell que s'hi enfronta, i precisament, assolir la solució d'aquest repte és un dels plaers més grans que es pot obtenir fent matemàtiques. Tots coneixem la secció de problemes d'aquesta mateixa revista de la SCM, on n'hi apareixen alguns de ben bonics, i no precisament fàcils.

Per això, webs on es proposen problemes n'hi ha a cinc cèntims la dotzena. Però pocs han estat, en la meva experiència, tan sorprenents com www.projecteuler.com. En aquest web, sense distraccions ni gaires complicacions gràfiques, es proposa una llista de dos-cents dinou problemes, classificats per ordre aproximat, de més fàcil a més difícil. I aquesta classificació es fa sobre la base de la gent que ha aconseguit resoldre cada problema. Cadascun dels problemes té una solució numèrica única, sovint un número de vuit o nou xifres, que cal entrar perquè et comptin el problema com a resolt. Hi ha problemes com el següent:

1. Trobeu la suma de tots els nombres naturals menors de 1.000 que són múltiples de 3 o de 5.

És resoluble fent dues sumes de progressions geomètriques. O el problema:

5. Quin és el menor número divisible per tots els enters de l'1 al 20?

És un senzill càlcul d'un mínim comú múltiple. Lògicament, aquests dos problemes apareixen a la llista com dos dels més resolts. Però la llista es complica i hi apareixen problemes com:

20. Trobar la suma dels dígits de 100!

25. Quin és el primer terme de la successió de Fibonacci que té 1.000 dígits?

Aquests ja no són fàcilment resolubles a mà. De fet, la majoria dels problemes de la llista estan pensats per a l'afeccionat, tant a les matemàtiques com a la programació de programes senzills però interessants. Part de l'interès d'aquests problemes consisteix a escriure un programet, en el llenguatge de la vostra elecció, que et permeti resoldre el problema. I evidentment, també és preferible buscar un programa eficient, evitar la força bruta que consistiria a agafar el problema pel dret i programar-lo. De fet, buscant els comentaris als problemes, es veuen els programes que la gent ha fet servir per resoldre el problema, i l'eficiència de cadascun.

Us deixo amb alguns dels problemes més difícils de la llista (o com a mínim dels que ha resolt menys gent!):

142. Trobeu el mínim $x + y + z$ amb enters $x > y > z$ tal que $x + y$, $x - y$, $x + z$, $x - z$, $y + z$ i $y - z$ són tots quadrats perfectes.

193. Quants enters lliures de quadrats menors que 2^{50} hi ha?

Animeu-vos a resoldre'ls!

Josep Burillo
UPC